

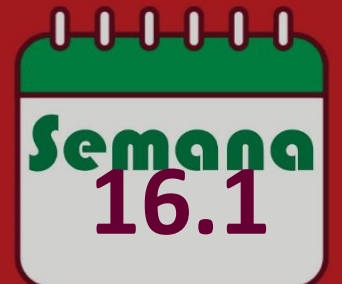


ce
pre
UNI

Álgebra

**Sistema lineal de m
ecuaciones con n incógnitas**

**CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1**



CONTENIDO

1. Matriz escalonada y rango de una matriz
2. Método de Gauss para resolver un SEL de $m \times n$
3. Teorema de Rouché – Frobenius
4. Propiedades



Matriz Escalonada (por filas)

Definición. Se dice que una matriz A de orden $m \times n$ es escalonada, si:

1. Todas las filas no nulas, están por encima de las filas nulas (todas las componente son cero).
2. El primer elemento no nulo de **una fila** (a partir de la **segunda**) está en una columna a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.

Ejemplo. Algunas matrices escalonadas son:

$$\begin{bmatrix} 4 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & \\ 0 & 0 & -3 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 22 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existen matrices elementales $E_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tales que:

$$E_r E_{r-1} \dots E_2 E_1 A = A_0$$

donde A_0 es una matriz escalonada

Nota:

1. La matriz A_0 se le conoce como la matriz escalonada asociada a la matriz A .
2. La matriz A_0 no es única.
3. Las matrices A y A_0 son equivalentes por filas.

Problema: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 12 & 13 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

Halle una matriz escalonada asociada a la matriz A

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 12 & 13 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -10 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_4 - f_1}]{f_2 - 3f_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -12 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3 - \frac{1}{2}f_2 \\ f_4 - 2f_2}]{f_3 - \frac{1}{2}f_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego } A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación:

$$A_0 = E_{42}(-2)E_{42}\left(-\frac{1}{2}\right)E_{41}(-1)E_{21}(-3)A$$

Rango de una matriz

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Se define el rango de la matriz A como el número de filas no nulas de la matriz escalonada asociada a la matriz A . Se denota por $\text{rang}(A)$.

Nota: Dos matrices equivalentes, tienen el mismo rango.

Ejemplo Determine el rango de las siguientes matrices escalonadas:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(A) = 2$$

$$, B = \begin{bmatrix} 12 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(B) = 3$$

$$, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}(C) = 4$$

Ejemplo (GUIA 2024 Problema 160)

Halle el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Clave

Método de Gauss para la resolución de un SEL de $m \times n$

Recordemos: Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ (**S.E.L de $m \times n$**), es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde los coeficientes $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ y $b_1, b_2, \dots, b_m$ son números reales conocidos.

Cuya representación en forma matricial es:

$$AX = b$$

donde: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ es la matriz de coeficientes

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es la matriz de incógnitas

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ es la matriz de términos independientes

Definición

Sea el sistema lineal $AX = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Se define la matriz aumentada o ampliada del sistema a la matriz de la forma:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \mathbf{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \mathbf{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \mathbf{b}_m \end{array} \right]$$

la cual es una matriz de orden $m \times (n + 1)$

Problema: Sea la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Resolver el sistema

Solución Consideramos variables x, y, z y w . Luego obtener el S.E.L. equivalente asociado a dicha matriz aumentada es

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \dots (1) \\ y + w = 1 \dots (2) \\ z - w = 2 \dots (3) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Tomamos como parámetro } w = t \\ \text{En (3) } z = 2 + t \\ \text{En (2) } y = 1 - t \\ \text{En (1) } x = 1 + 2(1 - t) = 3 - 2t \quad \text{De aquí:} \end{array}$$

$$CS = \{(3 - 2t; 1 - t; 2 + t; t), t \in \mathbb{R}\} = \{(3; 1; 2; 0) + t(-2; -1; 1; 1), t \in \mathbb{R}\}$$

Método de Gauss para resolver un SEL de $m \times n$

Sea el sistema lineal $AX = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Luego

1. Representar el S.E.L mediante su matriz ampliada $[A \mid \mathbf{b}]$.
2. Mediante operaciones elementales por filas transformar la matriz ampliada a una escalonada $[A_0 \mid \mathbf{b}_0]$, así:

$$[A \mid \mathbf{b}] \xrightarrow[\text{elementales por filas}]{\text{Operaciones}} [A_0 \mid \mathbf{b}_0]$$

3. Obtener el S.E.L equivalente que esté asociada a ella.
4. Resolver el S.E.L por sustitución regresiva, tomando los parámetros pertinentes (si fuera el caso).

Teorema de Rouché – Frobenius

Sea el sistema lineal $AX = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.
Entonces

1. El SEL es compatible determinado, si y solo si

$$\text{rang}(A) = \text{rang}[A \mid \mathbf{b}] = n$$

2. El SEL es compatible indeterminado, si y solo si

$$\text{rang}(A) = \text{rang}[A \mid \mathbf{b}] < n$$

Además, en este caso, las soluciones del sistema dependen de un número de parámetros libres $k = n - \text{rang}(A)$

3. El SEL es incompatible ($CS = \emptyset$), si y solo si

$$\text{rang}(A) \neq \text{rang}[A \mid \mathbf{b}]$$

NOTA: Recuerde que n es el número de incógnitas

Ejemplo (GUIA 2024 Problema 157)

Sea $AX = B$ un sistema lineal de “m” ecuaciones y “n” incógnitas. Dar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. Si $m = n$ entonces el sistema tiene solución única
- II. Si $m < n$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones
- III. Si $m > n$ entonces el sistema no tiene solución

A) FFF B) VFF C) VFV D) FVF E) FVV

Clave

Ejemplo. Resuelva el S.E.L de 3×3

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Resolución Representamos la matriz ampliada del S.E.L

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1}]{f_2 - 2f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 - 5f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right]$$

Observamos $\text{rang}(A_0) = \text{rang}[A_0 | \mathbf{b}_0] = 3$. Luego por el teorema de Rouché – Frobenius, el S.E.L es compatible determinado. De aquí:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \dots (1) \\ -y + z = 0 \dots (2) \\ -6z = -6 \dots (3) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{De (3)} \ z = 1 \\ \text{En (2)} \ y = 1 \\ \text{En (1)} \ x = 1 \end{array}$$

De aquí: $CS = \{(1; 1; 1)\}$

Ejemplo. Resuelva el S.E.L de 3×3

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + 4y - 4z = 3 \end{cases}$$

Resolución Representamos la matriz ampliada del S.E.L

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 5f_1}]{f_2 - 3f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 - f_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Observamos $\text{rang}(A_0) = \text{rang}[A_0 \mid \mathbf{b}_0] = 2 < 3$. Luego por el teorema de Rouché – Frobenius, el S.E.L es compatible indeterminado. De aquí:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \dots (1) \\ -y + z = -2 \dots (2) \end{cases} \begin{array}{l} \text{Tomamos como parámetro } z = r \\ \text{En (2) } y = 2 + r \\ \text{En (1) } x = 0 \end{array} \quad \text{De aquí:}$$

$$CS = \{(0; 2 + r; r), r \in \mathbb{R}\} = \{(0; 2; 0) + r(0; 1; 1), r \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo. Resuelva el S.E.L de 3×4

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2w + 4z = 1 \\ 7x - 4y + w + 3z = 2 \\ 5x + 7y - 4w - 6z = 4 \end{cases}$$

Resolución

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 5f_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{f_3 - f_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Observamos $\text{rang}(A_0) = 2 \neq 3 = \text{rang}[A_0 \mid \mathbf{b}_0]$. Luego por el teorema de Rouché – Frobenius, el S.E.L es incompatible (no tiene solución). De aquí:

De aquí: $CS = \emptyset$

Ejemplo. Resuelva el S.E.L.H de 4×3 :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x + 10y + 4z = 0 \\ 2x + 8y + 14z = 0 \\ 2x + 6y + 6z = 0 \end{cases}$$

Resolución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 14 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_2 - 4f_1 \\ f_3 - 2f_1 \\ f_4 - 2f_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{f_1 - f_2 \\ f_3 - 2f_2 \\ f_4 - f_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Observamos $\text{rang}(A_0) = \text{rang}[A_0 \mid \mathbf{b}_0] = 2 < 3$. Luego por el teorema de Rouché – Frobenius, el S.E.L es compatible indeterminado. De aquí:

$$\begin{cases} x - 9z = 0 \dots (1) \\ 2y + 8z = 0 \dots (2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Tomamos como parámetro } z = t \\ \text{En (2) } y = -4t \\ \text{En (1) } x = 9t \quad \text{De aquí:} \end{array}$$

$$CS = \{(9t; -4t; t), t \in \mathbb{R}\} = \{t(9; -4; 1), t \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo. Halle el valor del parámetro “a” para que el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = 4 \\ -x + 4y = a + 2 \\ 3x - 5y - 2z = -4 \end{cases}$$

i. Sea incompatible

ii. Sea compatible indeterminado

Resolución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & a+2 \\ 3 & -5 & -2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 + f_1 \\ f_4 - f_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 7 & -2 & a+6 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{f_3 + f_2 \\ f_4 - f_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

i. Incompatible, si $a \neq 2$: $\text{rg}(A_0) = 2 \neq 3 = \text{rg}[A_0 | \mathbf{b}_0]$

ii. Compatible indeterminado, si $a = 2$: $\text{rg}(A_0) = \text{rg}[A_0 | \mathbf{b}_0] = 2 < n = 3$